UNA APUESTA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FLEXIBLE. LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

Teresa Isabel Pérez Antuña - Nora Ravaioli Rodriguez
tperezan@gmail.com – nravaioli@gmail.com
Instituto de profesores Artigas (IPA) - Uruguay

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: aritmética-álgebra, resolución ecuaciones, fluidez procedimental

Resumo
El aprendizaje de la resolución de ecuaciones al inicio de la enseñanza media es un centro de tensiones donde se conjugan numerosas expectativas e ideas previas de los docentes, las familias y los estudiantes.
Como sostiene Kaput, (1996)"El actual fracaso escolar en el campo del álgebra ha demostrado que los intentos por ligar la experiencia de los estudiantes a los formalismos después de haberlos introducido no resultan adecuados. Parece ser que 'si algo carece de sentido cuando se aprende, la sensación permanece a lo largo del tiempo'"
¿Es posible fortalecer la práctica de resolución de ecuaciones a la vez que se construye el concepto de ecuación?
En este taller, nos proponemos compartir actividades que favorezcan la reflexión sobre el significado de método y estrategia de resolución de ecuaciones y sobre posibles alternativas de enseñanza, basadas en una práctica productiva.

Motivación

Desde nuestro lugar de docentes de didáctica y de supervisión hemos podido observar que, al inicio del trabajo con ecuaciones, es común que estas se presenten a partir de situaciones contextualizadas, aunque en muchos casos la traducción al lenguaje algebraico responde a una necesidad del docente y no del alumno. Luego se resuelven unos pocos casos "por tanteo" o haciendo uso de estrategias informales para rápidamente automatizar las "técnicas de pasaje" respondiendo nuevamente a una necesidad del docente. Se da muy poco espacio para que el estudiante experimente en la resolución de ecuaciones, utilizando estrategias artesanales y contextualizadas a cada caso a resolver, sin aplicar un "método estándar".

ISBN 978-84-945722-3-4

Esa introducción prematura, de “métodos”, orientada exclusivamente a la resolución de ecuaciones de primer grado, con el propósito de automatizar lo antes posible las “reglas de pasaje” genera, como reacción en el alumno, la necesidad de aplicar mecánicamente reglas y/o a “pasar cosas para un lado y para el otro” sin un criterio claro de prioridad y sin generar mecanismos de control sobre lo que hace. Amerom (2002, p.9) al analizar las dificultades de aprendizaje en relación al álgebra concluye que: “Cuando las ecuaciones surgen de una buena comprensión de las relaciones subyacentes – cuando estas tienen sentido para el alumno – se ha establecido que los estudiantes son más exitosos en su resolución “

El applet cover-up: http://goo.gl/KxhmPP, del Freudenthal Institute, nos inspiró para utilizarlo como espacio de experimentación, en un contexto matemático, permitiendo construir la noción de ecuación, desde el objetivo de su resolución, entendido como “encontrar algún valor que asegure la igualdad” y no como una serie de reglas sin sentido para el estudiante. Favoreciendo, adicionalmente, la consolidación y reflexión sobre las prácticas operatorias de la aritmética, lo que permite revisitar y reconceptualizar las mismas a través de una práctica de carácter productivo (en contraposición a reproductivo)

En este marco es que nos proponemos trabajar en formato taller promoviendo en los participantes la reflexión sobre una propuesta de enseñanza de la resolución de ecuaciones, que en un ambiente de experimentación, permita al estudiante desarrollar estrategias de resolución a la vez que construye la noción de ecuación[1].

Fundamento teórico

Nos ubicamos en el punto vista de Kieran (1992, 2013) quién sugiere desprenderse de la histórica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual, enfocándose en las interrelaciones de estos aspectos, dejando de considerarlos como antagónicos. Según la autora: “Para cubrir la falta de comprensión los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y eventualmente llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra” (Kieran, 1992, p.1). Esto lleva a que la comprensión se debilite, entrando en un círculo vicioso del cual es difícil salir.

[1] Entendiendo la noción de ecuación en el plano de lo que Chevalard (1991) define como “paramatemático” nociones o herramientas que si bien son útiles para describir y estudiar objetos matemáticos, no son objeto de estudio en sí mismos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Creemos importante por lo tanto ayudar a los estudiantes a establecer vínculos entre la comprensión de conceptos y las habilidades procedimentales. Estos vínculos se manifiestan a través de lo que se denomina “fluidez procedimental” caracterizada como:

> *“una componente crítica de la competencia matemática […] es la capacidad de aplicar los procedimientos de manera precisa, eficaz y flexible; de transferir los procedimientos a diferentes problemas y contextos; de construir o modificar los procedimientos a partir de otros procedimientos; y de reconocer cuál estrategia o procedimiento es más adecuado aplicar“(NCTM, 2014, p. 1).*

En 2015, reafirman este punto de vista, al sostener que:

> *“...La fluidez no es una idea simple. Tener fluidez significa que los estudiantes pueden elegir con flexibilidad métodos y estrategias para resolver problemas matemáticos y contextuales, que entienden y son capaces de explicar sus enfoques y que pueden ofrecer respuestas exactas de un modo eficiente.” (NCTM, 20015)*

Kieran (2013), señala dos aspectos relevantes de los procedimientos en el aprendizaje de la matemática. Por un lado resalta su “naturaleza conceptual” durante el periodo de elaboración y por otro las instancias de reestructuración y ampliación a través de elementos conceptuales, aun cuando ya han sido automatizados.

Estas ideas nos llevaron a cuestionarnos, ¿qué hace un estudiante cuando le pedimos que resuelva una ecuación? Creemos poder afirmar, sin temor a equivocarnos, que en la mayoría de los casos comienza a realizar una secuencia de pasos o reglas que en general terminan cuando se obtiene un valor de la incógnita. Pero ¿ese valor obtenido es realmente solución de la ecuación? ¿Podrán existir otros valores que también lo sean? ¿Cuántos? Son preguntas que difícilmente el estudiante se formule y que atañen a nuestra función de docentes generar.

Describimos a continuación el significado que daremos en este taller a: resolver una ecuación, solución de una ecuación, estrategia de resolución, explicación.

<u>Resolver una ecuación</u>

Determinar el o los valores de la incógnita que transformen la ecuación en una identidad numérica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Somos conscientes de que esta caracterización no implica la existencia de una estrategia formal y algebraica de determinación de la incógnita. De este modo el aspecto conceptual es el sustento que da sentido al desarrollo de una amplia variación de posibilidades y modos de resolución sin perder de vista la noción de ecuación como igualdad condicionada.

La constatación de que ese valor, sustituido en la ecuación debe transformarla en una identidad numérica, implicaría de alguna forma la necesidad de la verificación. Al explicitar "él o los valores" dejamos abierta la posibilidad de que en ecuaciones cuadráticas los estudiantes den como solución un solo valor y no dos.

Solución de una ecuación

Llamaremos *solución de una ecuación* a cada uno de los valores que se determinan en la resolución y *conjunto solución* al conjunto de todas las soluciones.

Estrategia de resolución

Procedimiento seguido por el estudiante para encontrar alguna solución de la ecuación

Desarrollo del taller

En una primera instancia pediremos a los participantes que anticipen cómo creen que alumnos de ciclo básico (13-15) resolverían ecuaciones como:

$$10 - 4.\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = -26 \qquad \text{ó} \qquad 13 - \frac{56}{21 + \frac{70}{3+x}} = 12\,.$$

A partir de ellos intentaremos hacer visibles las prácticas que los docentes en general priorizamos en la enseñanza de la resolución de ecuaciones.

En segunda instancia propondremos la experimentación con un applet que promueve el uso de estrategias aritméticas y realizaremos su análisis didáctico.

Promoveremos la reflexión sobre las variables didácticas que el docente debe considerar al elegir el tipo de ecuación a proponer a sus alumnos, por ejemplo: el tipo de números con los que se trabaje, el tipo de ecuaciones, la aparición de la variable en la ecuación, el momento del curso en el que se propone, las herramientas que habilita para su resolución, etc.

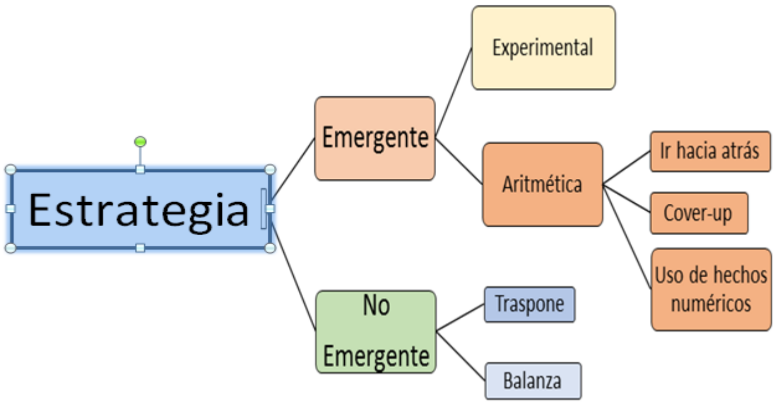
Finalmente compartiremos algunas producciones de alumnos realizadas en el marco de nuestro trabajo final de tesis de Maestría (Pérez & Ravaioli, tutor: Cecilia Calvo, 2015)

En la investigación, se aplicó una secuencia didáctica a alumnos de 13 años que no habían tenido instrucción formal en álgebra. Incluyó el trabajo con el applet de Cover-up. Los alumnos respondieron una prueba en formato papel que fue analizada categorizando las

ISBN 978-84-945722-3-4

producciones de los estudiantes según dos dimensiones: el tipo de estrategias utilizadas y el tipo de explicaciones brindadas.

Las categorías de estrategias que pudimos identificar se resumen en el siguiente esquema:



A modo de cierre

La idea de este taller se origina en el interés de compartir algunos aspectos constatados en el trabajo mencionado:

- aún los estudiantes que no recibieron instrucción en estrategias formales de resolución de ecuaciones, pudieron resolver tipos de ecuaciones que a priori podrían parecer impensables para ese nivel, como cuadráticas, racionales, irracionales, etc.
- las dificultades que surgieron se relacionan más con el tipo de número u operación involucrada que con el tipo de ecuación propuesta.
- ofrecer un espacio de experimentación libre, al inicio del estudio del tema, favoreció elecciones más flexibles en los estudiantes.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Amerom, B.A. van (2002). Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. (Thesis, Utrecht University). ISBN 90-73346-48-7.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?. Revista UNO, Parte I: 9, 85-97.Parte II: 10, 89-103. Barcelona: Graó.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, pp. 390-419. (Consultado en: Mesa, V. (1995) Investigar y Enseñar. Una empresa docente. Capítulo 17. Universidad de los Andes)

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra. En Leatham, K. (Ed.), Vital directions in mathematics education research (pp. 153-171). New York: Springer.

NCTM, (2014). Procedural Fluency in Mathematics. Recuperado de http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=42833

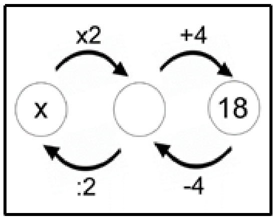
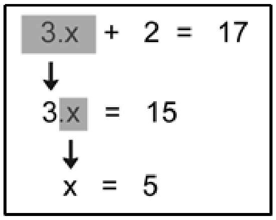
NCTM, (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. http://www.nctm.org/

Pérez, T & Ravaioli, N (2015). Las estrategias aritméticas como recurso en el primer acercamiento a la resolución de ecuaciones: la transición de la aritmética al álgebra. (Tesis de Maestría, Universidad Católica del Uruguay, Tutor de Tesis: Dra. Cecilia Calvo). No publicada.

ANEXO

Entendemos por métodos de resolución aritméticos aquellos que evidencian como sustancial el uso de conocimientos aritméticos relacionados con las operaciones involucradas en la ecuación. Por ejemplo:

ISBN 978-84-945722-3-4

Aritmético Hacia Atrás (AHA) El alumno realiza los cálculos necesarios para “deshacer” o “ir para atrás” las operaciones involucradas en la ecuación, planteando o no las operaciones inversas.	Para resolver 2x+4=18 
Aritmético Cover up (ACU) El alumno identifica el valor numérico de “una parte” de *la expresión* en la que aparece la incógnita, evidenciándose explícitamente esta identificación en el registro escrito de su razonamiento.	
Aritmético Hechos Numéricos (AHN) El alumno realiza planteos aritméticos que muestran la puesta en juego de repertorios numéricos conocidos diferentes de los expresados en los dos casos anteriores.	Para resolver 10+4x=2 10-8 es 2 4x debe ser negativo 4x=-8 entonces x=-2

Extraído de:
Pérez, T & Ravaioli, N., (2015). Las estrategias aritméticas como recurso en el primer acercamiento a la resolución de ecuaciones: la transición de la aritmética al álgebra. (Tesis de Maestría, Universidad Católica del Uruguay, Tutor de Tesis: Dra. Cecilia Calvo). No publicada.

ISBN 978-84-945722-3-4